Numerik für Differenzialgleichungen

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. S. Hertzog

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss17/ndgln` .

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1. (4 Punkte) Es seien $y \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\tau > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $t_k = k\tau$ und setze $y^k = y(t_k)$.
(i) Zeigen Sie, dass für die Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten

$$d_t^+ y^k = \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau}, \quad d_t^- y^k = \frac{y^k - y^{k-1}}{\tau},$$

$k = 1, 2, \ldots, K-1$, die Abschätzungen

$$|d_t^\pm y^k - y'(t_k)| \leq \frac{\tau}{2} \sup_{t \in t_k \pm [0,\tau]} |y''(t)|$$

gelten.
(ii) Der zentrale Differenzenquotient ist für $k = 1, 2, \ldots, K-1$ gegeben durch

$$\widehat{d}_t y^k = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau}.$$

Zeigen Sie $|\widehat{d}_t y^k - y'(t_k)| = \mathcal{O}(\tau^2)$.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte) Verwenden Sie das explizite und implizite Euler-Verfahren für die Differenzialgleichung $y'(t) = 2\alpha t y(t)$ mit Schrittweiten $\tau = 1/2^\ell$, $\ell = 1, 2, 3$, sowie dem Anfangswert $y_0 = 1$ und $\alpha = 3$, um die Approximationslösungen beider Verfahren zum Zeitpunkt $T = 1$ zu bestimmen, und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte) Sei $f \in C^2([0,T] \times \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \tau\big[f(t_k, y_k) + \frac{\tau}{2}\big(\partial_t f(t_k, y_k) + \partial_y f(t_k, y_k) f(t_k, y_k)\big)\big]$$

konsistent von der Ordnung $p = 2$ ist.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte) Seien $(y_\ell)_{\ell=0,\ldots,K}$ eine nichtnegative Zahlenfolge und $\alpha, \beta \geq 0$, sodass für $\ell = 0, 1, \ldots, K$ die Abschätzung

$$y_\ell \leq \alpha + \sum_{k=0}^{\ell-1} \beta y_k$$

gilt. Zeigen Sie, dass $y_\ell \leq \alpha(1+\beta)^\ell \leq \alpha \exp\big(K\beta\big)$ für $\ell = 0, 1, \ldots, K$ gilt. Folgern Sie die diskrete Version des Lemmas von Gronwall.

Abgabe: Am Mittwoch, den **31. Mai 2017**, zu Beginn der Vorlesung.